第２章　時空の数学的表現

まずは、我々の時空は４次元であるというところから出発する。添字について、これ以降は特にことわらない限り、英字 $a, b, ..., h$ は $1, 2, 3$ を、英字 $i, j, ..., z$ は $1, 2, 3, 4$ を、ギリシヤ文字 $\alpha, \beta, ..., \omega$ は $0, 1, 2, 3, 4$ を表すものとする。

§２．１　物体の自由落下路は質量によらない

この命題が、どのような実験で、どの程度正確に確認されているのか、僕は知らないが、たぶん、正確に成り立つのだろうということは、次のような経験や考察によってもわかる。

最近ではテレビなどで、地球軌道上のスペースシャトルや宇宙ステーションの中の映像を、見る機会も多い。そこでは、無重力状態の宇宙飛行士が、目の前にいろんな物を置いて、浮かせたり回転させたりしている。その光景からは、質量の違いによって、自由落下路が異なるようには見えない。

今、自由落下状態にある物体 M と、その中の１部分 $M1$ を考える。もし、自由落下路が物体の質量によって異なるとすると、物体の１部分 $M1$ が、元の物体 M とは、別の路を行きたがるということになる。他の１部分 $M2$ をとれば、また別の路を行きたがる。僕が口を出すのも変であるが、これは創造主にとっては、まことに都合の悪い、まことによろしからぬことである。だから、そんな風にはなっていないと思われる。

§２．２　各点慣性座標と自由落下の方程式

今後、４次元時空を座標 (x^i) を用いて考えるときは、４次元時空 (x^i) のようにいう。

数学的な４次元空間の中に、物理的時空を表現するためには、どのようなものを導入したらよいのかと考えたとき、まず、最初の候補に上げられるのは、質点の自由落下路や、光の波面とかであろう。そのためにまず、各点慣性座標というものを定義する。

４次元時空 (x^i) 上に、ある特別な４次元各点座標 (y^i) を与え、これを各点慣性座標 (y^i) と呼ぶ。この各点慣性座標は、物理的時空内を自由落下する観測者（例えば、地球軌道上の宇宙ステーションの乗員のような）が、その周囲に作る、 $Euclid$ 的な（４次元的には $Minkowski$ 的

な）直交座標を表現したものである。すなわち、物理学でいう慣性系の数学的表現である。

いま、４次元時空 (x^i) 内の質点の自由落下路を $x^i(\tau)$ とする。 $x^i(\tau)$ 上の各点慣性座標 (y^i) からこの路を見ると、 $d^2y^i/d\tau^2 = 0$ となると考えられる。この式を (x^i) 上に落とすと、§１．８の公式(7) を使えば、

$$\frac{d^2y^i}{d\tau^2} = \frac{\partial y^i}{\partial x^n}\Big(\frac{d^2x^n}{d\tau^2} + \frac{\partial x^n}{\partial y^l}\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^j \partial x^k}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\Big) = 0$$

となる。この右辺の（ ）内は、§１．４で定義した記号を用いて、${}^y[x^n/\tau]$ と書けるから、この方程式は

$${}^y[x^i/\tau] = 0$$

と書けるだろう。これが質点の自由落下の方程式を表すと考える。 §１．４で述べたように、この解 $x^i(\tau)$ のパラメータ τ は、この方程式に固有のものであるので、これを、この自由落下路の正規パラメータと名付ける。定数 c によって $t = c\tau$ とすると、 t もこの路の正規パラメータとなる。逆に、 t がこの路の正規パラメータであれば、定数 c によって、$t = c\tau$ と書けることは§１．４で述べた。この正規パラメータ τ が、実は物理量の固有時に対応すると考えられるのであるが、その詳しい議論は§４．５で行う。

§２．３　光錐面と光路の方程式

まず、行列 B_{ij} を次のように定義する。

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = -1\ ,\ B_{44} = 1\ ,\ \text{他は} B_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

４次元時空 (x^i) の各点に、１点から放射する光の波面を表現する光錐面というものを定義する。 (x^i) の点 P に光源を置いたとき、 P から出る光線の方向ベクトル v^i は、次式を満たすものとする。

$$G_{ij}(P)v^iv^j = 0 \ \ ,\ \ G_{ij}(P) = G_{ji}(P)$$

この $G_{ij}(P)$ を点 P の光錐面と名付ける。 λ を (x^i) 上の任意のスカラーとするとき、 λG_{ij} は G_{ij} とまったく同じ光錐面を与える。すなわち、光錐面にはスカラー分の自由度がある。曲がりのないまったく平坦な時空では、座標 (x^i) をうまくとれば、光錐面は λB_{ij} になると考えられる。

G_{ij} が座標変換 $(x^i) \to (\bar{x}^i)$ によってどう変わるかといえば、

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\bar{v}^j$$

であるから、

$$G_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}\bar{v}^k\bar{v}^l = 0$$

となり、よって

$$\bar{G}_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}G_{ij}$$

と考えればよいことがわかる。すなわち、G_{ij} は $(0,2)$ 次テンソルである。

$G_{ij}(P)$ について、 P のある各点慣性座標 (y^i) をとれば、

$$G_{ij}(P) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}B_{kl}$$

となるべきだろう。これを可能にするために、 G_{ij} に次の条件を要請する。すなわち、ある正則な行列 S_i^j が存在して、

$$S_i^k S_j^l G_{kl} = B_{ij}$$

となる。これから

$$\det(G_{ij}) < 0$$

となることがわかる。

質点の自由落下の方程式はすでに与えたが、物理学でいう慣性系では、質点の自由落下と同様に光路も直線であるから、光路は $G_{ij}(P)v^iv^j = 0$ を満たす方向へ始まる ${}^y[x/\tau] = 0$ によって表されると考えられる。光錐面の定義より、このとき、光路 $x^i(\tau)$ はずっと $G_{ij}(P)v^iv^j = 0$ を満たしていなくてはならない。これを、＜光路の公理１＞と呼ぶことにしよう。

さて、＜光路の公理１＞が常に成り立つためには、どのようになっていればよいのだろうか。この路に沿って $G_{ij}v^iv^j$ はずっと 0 でなくてはならないから、 $v^i = dx^i/d\tau$ として、

$$0 = \frac{d}{d\tau}(G_{ij}v^iv^j) = {}^y\nabla_k(G_{ij}v^iv^j)v^k$$

$$= ({}^y\nabla_k G_{ij})v^iv^jv^k + 2G_{ij}({}^y\nabla_k v^i)v^kv^j$$

となるが、ここで

$$({}^y\nabla_k v^i)v^k = {}^y[x^i/\tau] = 0$$

であるから、

$$({}^y\nabla_k G_{ij})v^iv^jv^k = 0 \quad (1)$$

を得る。

結局、式 (1) は点 P から始まるすべての光路について成り立つ必要があるから、$G_{ij}v^iv^j = 0$ をみたす v^i のすべてに対して、式 (1) が成り

立つ必要がある。命題 2.3.1 より X^i を変数とする多項式 $G_{ij}X^iX^j$ は既約であるから、このことより、多項式 $({}^y\nabla_k G_{ij})X^iX^jX^k$ は、多項式 $G_{ij}X^iX^j$ で割り切れなくてはならない。(これは代数学の定理である、この章の末尾：参考文献「代数学講義」)

従って $2A_i$ が存在して、

$$ {}^y\nabla_k G_{ij}X^iX^jX^k = (2A_iX^i)(G_{jk}X^jX^k) $$

とならねばならない。書き換えると、

$$ ({}^y\nabla_k G_{ij} - 2A_kG_{ij})X^iX^jX^k = 0 \quad (2) $$

さて、ここに現れた A_i は、どのような性質を持つだろうか。G_{ij} は光錐面としては自由度があって、 λG_{ij} でもよかった。そこで、この議論を $\bar{G}_{ij} = \lambda G_{ij}$ で行ってみよう。

$$ {}^y\nabla_k \bar{G}_{ij} = (\partial_k\lambda)G_{ij} + \lambda\ {}^y\nabla_k G_{ij} $$

であるから、多項式としては、

$$ {}^y\nabla_k \bar{G}_{ij}X^iX^jX^k = (\partial_k\lambda)G_{ij}X^iX^jX^k + \lambda\ {}^y\nabla_k G_{ij}X^iX^jX^k $$

これに、式 (2) を考慮すれば、

$$ \begin{aligned} &= \{(\partial_k\lambda)G_{ij} + 2\lambda A_kG_{ij}\}X^iX^jX^k \\ &= 2\Big(\frac{1}{2\lambda}\partial_k\lambda + A_k\Big)\bar{G}_{ij}X^iX^jX^k \end{aligned} $$

となる。これを見ると、 $\bar{G}_{ij}$ に対応する $\bar{A}_k$は、

$$ \bar{A}_k = A_k + \partial_k \log\sqrt{\lambda} $$

であることがわかる。また、式 (2) の形より、 A_i は共変ベクトルと考えるべきである。このように、 A_i は電磁気のベクトルポテンシャルによく似た性質を持っているので、電磁気のベクトルポテンシャルではないかと、予想することができる。この A_i を時空ベクトルと呼ぶ。

ここまでで、＜光路の公理１＞が成立するためには、あるベクトル場 A_i があって、式 (2) を満たしている必要があった。では、式 (2) を満たす G_{ij} と A_i が予め与えられたとき、任意の点 P から $G_{ij}v^iv^j = 0$ 方向へ始まる ${}^y[x^i/\tau] = 0$ なる $x^i(\tau)$ に対して、＜光路の公理１＞が成立するだろうか。これは成立することが、次のようにしてわかる。この路 $x^i(\tau)$ 上の関数 $f(\tau)$ を、

$$ f(\tau) = G_{ij}v^iv^j \quad , \quad v^i = \frac{dx^i}{d\tau} $$

によって定義しよう。すると、

$$\frac{df}{d\tau} = ({}^{y}\nabla_k f)v^k = ({}^{y}\nabla_k G_{ij})v^i v^j v^k + 2G_{ij}v^i({}^{y}\nabla_k v^j)v^k$$

この式の第２項は 0 で、また第１項について式 (2) を使えば、

$$\frac{df}{d\tau} = (2A_k v^k)f \quad (3)$$

が成り立つ。この $f(\tau)$ について命題 2.3.2 を適用すると、始点 P で $f(P)=0$ だから、結局 $f(\tau)$ はずっと 0 であることがわかる。

これと関連する次のような問題をついでに考えよう。質点の自由落下路 $x^i(\tau)$ において、最初は $G_{ij}v^i v^j > 0$ であったものが、いつの間にか $G_{ij}v^i v^j < 0$ となってしまうようなことは、起こらないのだろうか。もし、そのようなことが起こるなら、 $x^i(\tau)$ 上のどこかの点 P において、必ず $G_{ij}v^i v^j = 0$ となるはずである。一方で、同じように $f(\tau)$ を定義すれば、式 (3) が成り立ち、命題 2.3.2 によって、この路の全体で $G_{ij}v^i v^j = 0$ であることになる。これは前提に矛盾し、そのようなことは起こらないことがわかる。

エーテル

このようにして、４次元時空上に光錐面や光路を定義した訳だが、これは別の見方をすれば、４次元時空そのものが、光の伝達媒体であるということである。しいて言うならば、エーテルということか。かって、光の伝達媒体エーテルの存在が議論されたことがあった。そのときのエーテルは空気や水のように物質的なものとされたため、エーテルと地球との相対速度が問題となって、議論を巻き起こした。しかし、今度のエーテルは４次元的存在であるから、そのような問題は生じない。数学的にいえば、４次元多様体という点の集合であり、ひとつひとつの点に個性を与え、２つの点を同一視しない、そういう存在である。

命題 2.3.1 G_{ij} を光錐面とするとき、 X^i を変数とする多項式 $G_{ij}X^iX^j$ は既約である。

（証明） 光錐面の定義よりある正則な行列 S_i^j があって、

$$B_{ij} = S_i^k S_j^l G_{kl}$$

となる。もし $G_{ij}X^iX^j$ が既約でないとすれば、 a_i, b_i があって

$$G_{ij}X^iX^j = a_iX^ib_jX^j$$

と書けるが、これに命題 2.3.3 を適用することで、

$$G_{ij} = \frac{1}{2}(a_i b_j + a_j b_i)$$

を得る。これより

$$B_{ij} = \frac{1}{2} S_i^k S_j^l (a_k b_l + a_l b_k) = \frac{1}{2}(\bar{a}_i \bar{b}_j + \bar{a}_j \bar{b}_i)$$

ここで

$$\bar{a}_i = S_i^p a_p \ , \ \bar{b}_i = S_i^p b_p$$

とおいた。この式より

$$-1 = B_{11} = \bar{a}_1 \bar{b}_1$$

これより $\bar{b}_1 = -1/\bar{a}_1$ を得て、同様にして $\bar{b}_2 = -1/\bar{a}_2$ を得る。また、

$$0 = B_{12} = \frac{1}{2}(\bar{a}_1 \bar{b}_2 + \bar{a}_2 \bar{b}_1) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} + \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1}\right)$$

この両辺に $\bar{a}_1 \bar{a}_2$ を乗じて、

$$0 = \bar{a}_1 \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \bar{a}_2$$

これより $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = 0$ でなければならないが、そうすると $B_{11} = 0$ となって矛盾する。（終）

命題 2.3.2 実数値関数 $f(t)$ が、

$$\frac{df}{dt} = k(t) f(t) \quad (1)$$

の関係を満たしているとする。このとき、ある t_0 で $f(t_0) = 0$ であるならば、任意の t で $f(t) = 0$ である。

（証明） 微分方程式(1) において、初期値 $f(t_0) = 0$ を持つ解は一意的に存在する。一方で、恒等的に $f(t) = 0$ なる $f(t)$ は、この解である。（終）

命題 2.3.3 一般に N 変数の多項式 $H_{ij} X^i X^j$ が恒等的に 0 ならば、任意の i, j について、

$$H_{ij} + H_{ji} = 0 \quad (1)$$

でなければならない。逆に (1) が成り立っていれば、この多項式は恒等的に 0 である。ここで $i, j = 1, 2, ..., N$ とする。

（証明） 変数 X^i の値として $X^1 = 1$ 、他を 0 とすることによって、$H_{11} = 0$ を得る。同様にして

$$H_{22} = H_{33} = ... = H_{NN} = 0$$

を得る。また、 X^i として $X^1 = X^2 = 1$ 、他を 0 とすることによって、

$$0 = H_{ij}X^iX^j = H_{11} + H_{12} + H_{21} + H_{22}$$

これより $H_{12} + H_{21} = 0$ を得る。他についても同様。

この逆については (1) より、

$$H_{ij}X^iX^j = -H_{ji}X^iX^j$$

一方で i と j の交換によって、

$$H_{ij}X^iX^j = H_{ji}X^jX^i$$

この２つの式より、

$$-H_{ji}X^iX^j = H_{ji}X^iX^j$$

これより $H_{ij}X^iX^j = 0$ を得る。（終）

§２．４ 時空ポテンシャルとゲージ変換

４次元時空 (x^i) 上に、光錐面 G_{ij} と各点慣性座標 (y^i) が与えられているとする。ある質点の自由落下路 ${}^y[x^i/\tau] = 0$ について、 ds を G_{ij} を４次元計量とみなしたときの距離、すなわち、 $ds^2 = G_{ij}dx^idx^j$ とする。この路について、 τ と s の関係は命題 1.4.1 によって、

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} + \frac{1}{2}({}^y\nabla_k G_{ij})V^iV^jV^k\frac{d\tau}{ds} = 0 \quad (1)$$

となる、ここで $V^i = dx^i/ds$ 。一方、§２．３の結果によって、

$$({}^y\nabla_k G_{ij})V^iV^jV^k = 2(A_kV^k)(G_{ij}V^iV^j)$$

であり、また $G_{ij}V^iV^j = 1$ であるから、式 (1) は次のようになる。

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} + (A_kV^k)\frac{d\tau}{ds} = 0 \quad (2)$$

この路上のどこかに始点 Q を定め、 $-A_i$ を点 Q から P まで線積分し、C をある定数として

$$\zeta(P) = -\int_Q^P A_i dx^i + C$$

とする。そして τ を

$$d\tau = \exp(\zeta)ds \quad (3)$$

と定義すると、

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} = \exp(\zeta)\frac{d\zeta}{ds} = -\exp(\zeta)A_i\frac{dx^i}{ds}$$

となって、この τ は関係 (2) を満たしている。§4．5で詳細に議論するが、この τ は、この路に沿った物理量としての固有時に同期していると考えられる。

ここで、固有時というものを簡単に定義しておこう。まず、予め定められた規格に従った時計をひとつ定め、それを基準時計と呼ぶことにする。基準時計は常に同じ材質と構造の時計である。４次元の路 $x^i(t)$ に沿った固有時とは、この路に基準時計を置いたとき、その時計が刻む時間であるとする。$\zeta(P)$ の定数 C を τ が基準時計の時間に一致するように定める。

この定義では具体的な物としての基準時計を用いた。しかし、物理量としての固有時は具体的な時計をそこに置かなくても、常に路に沿って存在するものと考えるべきである。

この ζ は時空ベクトル $-A_i$ を路に沿って線積分したものであるから、一種のポテンシャルと考えて、時空ポテンシャルと呼ぶことにする。

５次元化

式 (3) を２乗してみると、

$$d\tau^2 = \exp(2\zeta)G_{ij}dx^i dx^j$$

となるが、これを見ると、$\exp(2\zeta)G_{ij}$ がいかにも計量のように見える。ただ、ζ は各自由落下路に依存して決まるもので、(x^i) 上の関数ではない。そこで、時空ポテンシャル ζ を５番めの座標 x^0 とし、時空を５次元空間 (x^λ) にしてみる。ここで $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ である。そして、５次元計量 $g_{\lambda\mu}$ を、

$$g_{ij} = \exp(2x^0)G_{ij}(x^1, ..., x^4)\ ,\ g_{\lambda 0} = g_{0\lambda} = 0$$

と定義してみる。

さて、

$$d\zeta = dx^0 = -A_i dx^i$$

であったから、

$$dx^0 + A_i dx^i = 0$$

である。ここで、 A_i も５次元化して $A_0 = 1$ と定めるならば、この式は

$$A_\lambda dx^\lambda = 0$$

と書ける。この式の５次元的な意味は、 dx^λ は５次元化された自由落下の方向であるから、それが A_λ と５次元的に垂直であるということになる。

$A_0 = 1$ とすることは、数学的には理論がきれいになって気持ちがよい。一方、これを物理学的に見ると、そんな勝手なことをしてよいのかという不安が生じる。しかし、ここは数学的な整合性を重んじて、$A_0 = 1$ として先へ進むことにする。こうしておいて矛盾が生じなければ、それでよいと考えることもできる。

これからは A_i や G_{ij} を５次元的に見ることになるが、

$$A_\lambda(x^1, ..., x^4)\ ,\ G_{ij}(x^1, ..., x^4)$$

であって、どちらも x^0 を含まないことに注意しよう。 G_{ij} については

$$G_{00} = G_{i0} = G_{0i} = 0$$

と考え、５次元的に $G_{\lambda\mu}$ として扱うこともある。

さて、あらためて質点の自由落下路の５次元的な定義を行ってみよう。５次元の曲線 $x^\lambda(t)$ が質点の自由落下路であるとは、その４次元部分 $x^i(t)$ があるパラメータ τ によって ${}^y[x^i/\tau] = 0$ となり、かつ

$$A_\lambda v^\lambda = 0 \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

を満たすことである。このとき、

$$dr = \exp(x^0(t))ds \quad , \quad ds^2 = G_{ij}dx^i dx^j$$

とする r はこの路の正規パラメータである。すなわち ${}^y[x^i/r] = 0$ となる。なぜなら、命題 1.4.2 を適用すると、式

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2}({}^y\nabla_k G_{ij})V^i V^j V^k \frac{dr}{ds} \quad , \quad V^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds}$$

において、すでに見たように、

$$({}^y\nabla_k G_{ij})V^i V^j V^k = 2A_k G_{ij} V^i V^j V^k = 2A_k V^k$$

である。また、

$$\frac{dr}{ds} = \exp(x^0) \ , \ \frac{d^2r}{ds^2} = \exp(x^0)V^0$$

であるから、これより上式は

$$= \exp(x^0)V^0 + \exp(x^0)A_kV^k = \exp(x^0)A_\lambda V^\lambda = 0$$

となり、命題 1.4.2 の結果により $d^2r/d\tau^2 = 0$ 、これより結論を得る。

ゲージ変換

光錐面変換 $G_{ij} \to \lambda G_{ij}$ に伴う変換をゲージ変換と呼ぶ。これによって、

$$A_i \to A_i + \partial_i\eta \ , \ \eta = \log\sqrt{\lambda}$$

と変換されることはすでに述べた。ゲージ変換によって時空ポテンシャルがどう変わるかを考えよう。新ゲージでの時空ポテンシャルを $\bar{\zeta}$ とすれば、定義によって、

$$d\bar{\zeta} = -(A_i + \partial_i\eta)dx^i$$

である。これを路に沿って線積分して $\bar{\zeta}(P)$ を決める訳であるが、そこには始点 Q の位置と積分定数 C の与え方の問題が残る。そこで、路の固有時はゲージ変換によっては、変化しないと考えてみよう。すると、

$$d\tau^2 = \exp(2\zeta)G_{ij}dx^idx^j = \exp(2\bar{\zeta})\lambda G_{ij}dx^idx^j = \exp(2\bar{\zeta}+2\eta)G_{ij}dx^idx^j$$

これより、

$$\zeta(P) = \bar{\zeta}(P) + \eta(P)$$

でなければならない。これを座標で書けば、

$$\bar{x}^0 = x^0 - \eta(x^1, ..., x^4) \ , \ \bar{x}^i = x^i \quad (4)$$

となる。

さて、変換式 (4) で A_λ を変換してみると、

$$\bar{A}_0 = \frac{\partial x^0}{\partial \bar{x}^0}A_0 + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^0}A_j = 1 + \delta^j_0 A_j = 1$$

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^0}{\partial \bar{x}^i}A_0 + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}A_j = \partial_i\eta + \delta^j_i A_j = A_i + \partial_i\eta$$

このように、 $(\bar{x}^\lambda)$ でも $\bar{A}_0 = 1$ がうまく保たれている。

一般に、(x^λ) 上の $(0,2)$ 次対称テンソル $c_{\lambda\mu}$ を変換式 (4) で変換すると、

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \partial_i\eta c_{0j} + \partial_j\eta c_{0i} + \partial_i\eta\partial_j\eta c_{00}$$

$$\bar{c}_{0j} = c_{0j} + \partial_j\eta c_{00}\ ,\ \bar{c}_{00} = c_{00} \quad (5)$$

となる。これを $g_{\lambda\mu}$ に適用してみると、

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} \quad , \quad \bar{g}_{\lambda 0} = \bar{g}_{0\lambda} = 0$$

となる。

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} = \exp(2x^0)G_{ij} = \exp(2\bar{x}^0 + 2\eta)G_{ij} = \exp(2\bar{x}^0)\lambda G_{ij}$$

において、最後の項の λG_{ij} はちょうど $\bar{x}^0 = 0$ 面上の g_{ij} になっている。すなわち、 G_{ij} は $x^0 = 0$ 上の g_{ij} である、とする考えがよいことがわかる。

§２．５　５次元計量

§２．４で５次元計量として $g_{\lambda\mu}$ を定義したが、命題 2.5.4 に示したように、これは逆行列を持たないなど不完全にみえる。そこで、この $g_{\lambda\mu}$ を完全にした５次元計量 $h_{\lambda\mu}$ を定義しよう。

まず、この $h_{\lambda\mu}$ は $A_\lambda dx^\lambda = 0$ なるすべての方向 dx^λ に対しては、

$$h_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu = g_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu$$

を満たすとすべきだろう。従って、多項式

$$(h_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu})X^\lambda X^\mu$$

は、多項式 $A_\mu X^\mu$ で割り切れなくてはならない。従って、 a_λ があって恒等式、

$$(h_{\lambda\mu} - g_{\lambda\mu})X^\lambda X^\mu = (a_\lambda X^\lambda)(A_\mu X^\mu)$$

が成り立つ。これに命題 2.3.3 を適用することで、

$$h_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + \frac{1}{2}(a_\lambda A_\mu + a_\mu A_\lambda) \quad (1)$$

と書けることがわかる。

さて、 (1) の $h_{\lambda\mu}$ をゲージ変換してみよう。ゲージ変換は§２．４の式 (4) で行う。§２．４の式 (5) でも触れたが、この変換式によって h_{ij} は次のように変換される。

$$\bar{h}_{ij} = h_{ij} + \partial_i\eta h_{0j} + \partial_j\eta h_{0i} + \partial_i\eta\partial_j\eta h_{00}$$

$$\bar{h}_{0j} = h_{0j} + \partial_j \eta h_{00}\ ,\ \bar{h}_{00} = h_{00}$$

これを見ると、 h_{0j}/h_{00} は A_j と同じ変換になっているので、

$$h_{0j} = h_{00} A_j$$

としてみる。一方で、式 (1) より $h_{00} = a_0$ がわかる。これより $h_{0j} = a_0 A_j$ 。また、式 (1) より

$$h_{0j} = \frac{1}{2}(a_0 A_j + a_j)$$

がわかる。これと上の $h_{0j} = a_0 A_j$ により、$a_j = a_0 A_j$ を得る。また、$a_0 = a_0 A_0$ と書けるから、従って、

$$a_\lambda = a_0 A_\lambda$$

を得る。これによって、

$$h_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + \alpha A_\lambda A_\mu \quad (2)$$

と書けることになる。ここで、 a_0 を α と書いた。

さて、あらためて (2) の $h_{\lambda\mu}$ が、ゲージ変換によってどう変わるかを見よう。そのため、前述の $\bar{h}_{ij}$ の式の右辺に、この $h_{\lambda\mu}$ を代入してみると、

$$\bar{h}_{ij} = g_{ij} + \alpha(A_i + \partial_i \eta)(A_j + \partial_j \eta)$$

$$\bar{h}_{0j} = \alpha(A_j + \partial_j \eta)\ ,\ \bar{h}_{00} = h_{00}$$

となる。 g_{ij} については $g_{ij} = \bar{g}_{ij}$ であったから、これらから (2) の $h_{\lambda\mu}$ はゲージ変換によって、その形が変わらないことがわかる。

この計量 $h_{\lambda\mu}$ は、$Kaluza$ が提案した 5 次元計量によく似ている。違うのは、こちらは $g_{\lambda\mu}$ に $\exp(2x^0)$ が含まれている点である。

さて、計量 $h_{\lambda\mu}$ の中の α の値が未定になっていた。いま、

$$dx^\lambda = (dx^0, 0, 0, 0, 0)$$

の大きさをこの計量で測ると、

$$dl^2 = h_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu = h_{00} dx^0 dx^0 = \alpha dx^0 dx^0$$

そもそも、座標 x^0 は時空ポテンシャル値に等しいとした。また、この dl は時空ポテンシャル値になるように決めるのが、望ましいだろう。従って、

$$dx^0 dx^0 = dl^2$$

となるべきである。これから、 $\alpha = 1$ でなければならない。結局、

$$h_{\lambda\mu} = \exp(2x^0)G_{\lambda\mu} + A_\lambda A_\mu \quad (3)$$

となる。これ以降 $h_{\lambda\mu}$ をこの式 (3) によって定義する。

命題 2.5.1 $h^{\lambda\mu}, A^\lambda$ を、 $h^{\lambda\nu}h_{\nu\mu} = \delta^\lambda_\mu$, $A^\lambda = h^{\lambda\mu}A_\mu$ なるテンソルとすると、

$$h^{ij} = g^{ij} \ , \ h^{i0} = h^{0i} = -g^{ij}A_j$$

$$h^{00} = g^{ij}A_iA_j + 1 \ , \ g^{ij} = \exp(-2x^0)G^{ij}$$

$$A^0 = 1 \ , \ A^i = 0 \ , \ |A|^2 = A^\lambda A_\lambda = 1$$

となる。

（証明） $h^{\lambda\nu}h_{\nu\mu} = \delta^\lambda_\mu$ となることを確認する。

$$h^{i\alpha}h_{\alpha j} = h^{il}h_{lj} + h^{i0}h_{0j} = g^{il}(g_{lj} + A_lA_j) + (-A_lg^{li})A_j = \delta^i_j$$

$$h^{0\alpha}h_{\alpha j} = h^{0l}h_{lj} + h^{00}h_{0j}$$

$$= -A_kg^{kl}(g_{lj} + A_lA_j) + (g^{lm}A_lA_m + 1)A_j = 0 = \delta^0_j$$

$$h^{i\alpha}h_{\alpha 0} = h^{il}h_{l0} + h^{i0}h_{00} = g^{il}A_l - A_lg^{li} = 0 = \delta^i_0$$

$$h^{0\alpha}h_{\alpha 0} = h^{0l}h_{l0} + h^{00}h_{00}$$

$$= -A_kg^{kl}A_l + (g^{lm}A_lA_m + 1) = 1 = \delta^0_0$$

A^λ , $|A|$ については、

$$A^\lambda = h^{\lambda\mu}A_\mu = h^{\lambda i}A_i + h^{\lambda 0}A_0$$

より、

$$A^0 = h^{0i}A_i + h^{00} = -A_lg^{li}A_i + g^{ij}A_iA_j + 1 = 1$$

$$A^k = h^{ki}A_i + h^{k0} = 0$$

$$|A|^2 = A^\lambda A_\lambda = A^0A_0 = 1$$

（終）

命題 2.5.2 $h_{\lambda\mu}$ の $Christoffel$ の記号を ${}^h\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ で表す。

$$f_{\lambda\mu} = \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda \ , \ S_{\lambda\mu} = \partial_\lambda A_\mu + \partial_\mu A_\lambda$$

とするとき、

$$ {}^{h}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0} = \frac{1}{2} h^{\lambda l}(2g_{l\mu} - f_{l\mu}) \quad (1) $$

$$ {}^{h}\Gamma^{i}_{jk} = {}^{g}\Gamma^{i}_{jk} + (g^{il}A_l)g_{jk} + \frac{1}{2} g^{il}(A_j f_{kl} + A_k f_{jl}) \quad (2) $$

$$ {}^{h}\Gamma^{0}_{jk} = -{}^{g}\Gamma^{l}_{jk}A_l - \frac{1}{2} g^{lp}A_p(A_j f_{kl} + A_k f_{jl}) - h^{00}g_{jk} + \frac{1}{2} S_{jk} \quad (3) $$

ここで、

$$ {}^{g}\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}) $$

としている。すぐわかるように、

$$ {}^{g}\Gamma^{i}_{jk} = {}^{G}\Gamma^{i}_{jk} $$

である。また、 $f_{0\mu} = f_{\mu 0} = S_{0\mu} = S_{\mu 0} = 0$ に注意。

（証明）

$$ {}^{h}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) $$

$$ + \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha}\{\partial_\mu(A_\nu A_\alpha) + \partial_\nu(A_\mu A_\alpha) - \partial_\alpha(A_\mu A_\nu)\} $$

この右辺第２項は、

$$ = \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha}\{(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha + (\partial_\nu A_\mu)A_\alpha - (\partial_\alpha A_\mu)A_\nu\} $$

$$ + \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha}\{A_\nu(\partial_\mu A_\alpha) + A_\mu(\partial_\nu A_\alpha) - A_\mu(\partial_\alpha A_\nu)\} $$

これより、次の等式が成り立つ。

$$ {}^{h}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) $$

$$ + \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha}(A_\mu f_{\nu\alpha} + A_\nu f_{\mu\alpha} + A_\alpha S_{\mu\nu}) $$

これを使って、

(1) は、

$$ {}^{h}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0} = \frac{1}{2} h^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{0\alpha} + \partial_0 g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu 0}) $$

$$ + \frac{1}{2} h^{\lambda l}(A_\mu f_{0l} + A_0 f_{\mu l} + A_l S_{\mu 0}) $$

$$ + \frac{1}{2} h^{\lambda 0}(0 + 0 + 0) $$

これより結果を得る。ここで、 $\partial_0 g_{\mu\alpha} = 2g_{\mu\alpha}$ を使った。

(2) は、

$$
\begin{aligned}
{}^{h}\Gamma^{i}_{jk} &= \frac{1}{2}h^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}) \\
&+\frac{1}{2}h^{i0}(\partial_j g_{k0} + \partial_k g_{j0} - \partial_0 g_{jk}) \\
&+\frac{1}{2}h^{il}(A_j f_{kl} + A_k f_{jl} + A_l S_{jk}) \\
&+\frac{1}{2}h^{i0}(0+0+S_{jk}) \\
&= {}^{g}\Gamma^{i}_{jk} + \frac{1}{2}g^{il}A_l\partial_0 g_{jk} + \frac{1}{2}g^{il}(A_j f_{kl} + A_k f_{jl} + A_l S_{jk}) \\
&-\frac{1}{2}g^{il}A_l S_{jk}
\end{aligned}
$$

これより結果を得る。

(3) は、

$$
\begin{aligned}
{}^{h}\Gamma^{0}_{jk} &= \frac{1}{2}h^{0l}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}) \\
&+\frac{1}{2}h^{00}(\partial_j g_{k0} + \partial_k g_{j0} - \partial_0 g_{jk}) \\
&+\frac{1}{2}h^{0l}(A_j f_{kl} + A_k f_{jl} + A_l S_{jk}) \\
&+\frac{1}{2}h^{00}(0+0+A_0 S_{jk}) \\
&= -\frac{1}{2}A_p g^{pl}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}) - h^{00}g_{jk} \\
&-\frac{1}{2}A_p g^{pl}(A_j f_{kl} + A_k f_{jl} + A_l S_{jk}) + \frac{1}{2}(g^{pr}A_p A_r + 1)S_{jk}
\end{aligned}
$$

これより結果を得る。(終)

命題 2.5.3 役に立ちそうな等式として、

$$
h^{\lambda\alpha}g_{\alpha\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu} - \delta^{\lambda}_{0}A_{\mu}
$$

$$
{}^{h}\Gamma^{\lambda}_{ij}A_{\lambda} = \frac{1}{2}S_{ij} - g_{ij}\ ,\ {}^{h}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}A_{\lambda} = 0
$$

(証明)

$$
h^{\lambda\alpha}g_{\alpha\mu} = h^{\lambda\alpha}(h_{\alpha\mu} - A_\alpha A_\mu) = \delta^{\lambda}_{\mu} - A^{\lambda}A_{\mu}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{h}\Gamma^{\lambda}_{ij}A_{\lambda} &= {}^{h}\Gamma^{p}_{ij}A_p + {}^{h}\Gamma^{0}_{ij}A_0 \\
&= {}^{g}\Gamma^{p}_{ij}A_p + (g^{pl}A_l A_p)g_{ij} + \frac{1}{2}A_p g^{pl}(A_i f_{jl} + A_j f_{il})
\end{aligned}
$$

$$-\,{}^{g}\Gamma^{l}_{ij}A_l - \frac{1}{2}g^{lp}A_p(A_if_{jl}+A_jf_{il}) - h^{00}g_{ij} + \frac{1}{2}S_{ij}$$

$${}^{h}\Gamma^{\lambda}_{\mu 0}A_\lambda = \frac{1}{2}A_\lambda h^{\lambda l}(2g_{l\mu}-f_{l\mu}) = \frac{1}{2}A^l(2g_{l\mu}-f_{l\mu}) = 0$$

（終）

命題 2.5.4 g_{ij} を５次元的にした $g_{\lambda\mu}$ の逆行列は存在しない。なぜなら、もし $g^{\lambda\nu}$ が存在して、$g^{\lambda\nu}g_{\nu\mu}=\delta^{\lambda}_{\mu}$ とできたとする。ここで、$\lambda=\mu=0$ の場合をみると、$\delta^0_0=0$ となって矛盾する。従って、$g_{\lambda\mu}$ の $Christoffel$ の記号は考えられない。そこで、 g_{ij} の $Christoffel$ の記号 ${}^{g}\Gamma^{i}_{jk}$ について計算してみると、

$${}^{g}\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_j g_{kl}+\partial_k g_{jl}-\partial_l g_{jk})$$

$$= \frac{1}{2}\exp(-2x^0)G^{il}\{\partial_j(\exp(2x^0)G_{kl})+\partial_k(\exp(2x^0)G_{jl})-\partial_l(\exp(2x^0)G_{jk})\}$$

$$= \frac{1}{2}G^{il}(\partial_j G_{kl}+\partial_k G_{jl}-\partial_l G_{jk})$$

このように、 g_{ij} の $Christoffel$ の記号 ${}^{g}\Gamma^{i}_{jk}$ と、 G_{ij} の $Christoffel$ の記号 ${}^{G}\Gamma^{i}_{jk}$ は、一致する。（終）

命題 2.5.5 ５次元時空のベクトル a^λ に対して、ベクトル b^λ と c^λ を、

$$b_\lambda = g_{\lambda k}a^k\ ,\ c_\lambda = (A_\mu a^\mu)A_\lambda$$

と定義するとき、

1) b_λ と A^λ は垂直で、 $(a^\lambda - b^\lambda)$ は A^λ 方向。
2) $(a^\lambda - c^\lambda)$ と A^λ は垂直。
3) $a^\lambda = b^\lambda + c^\lambda$
4) $a_\lambda a^\lambda = b_\lambda b^\lambda + c_\lambda c^\lambda$

ここで、垂直というのは $h_{\lambda\mu}$ に関して垂直のことをいう。また、 $b^\lambda = h^{\lambda\mu}b_\mu$, $c^\lambda = h^{\lambda\mu}c_\mu$ と定義している。

（証明）

1) は、

$$b_\lambda A^\lambda = g_{0k}a^kA^0 = 0$$

$$a^i - b^i = a^i - h^{ij}g_{jk}a^k = a^i - a^i = 0$$

2) は、

$$(a^\lambda - c^\lambda)A_\lambda = a^\lambda A_\lambda - h^{\lambda\nu}(A_\mu a^\mu)A_\nu A_\lambda$$
$$= a^\lambda A_\lambda - (A^\lambda A_\lambda)(A_\mu a^\mu) = 0$$

3) は、

$$a_\lambda = h_{\lambda\mu}a^\mu = (g_{\lambda\mu} + A_\lambda A_\mu)a^\mu = g_{\lambda\mu}a^\mu + A_\lambda A_\mu a^\mu \quad (1)$$

$$= b_\lambda + c_\lambda$$

4) は式 (1) より、

$$a_\lambda a^\lambda = g_{ij}a^i a^j + (A_\mu a^\mu)^2$$

$$b_\lambda b^\lambda = h^{\lambda\mu}b_\lambda b_\mu = h^{\lambda\mu}(g_{\lambda i}a^i)(g_{\mu j}a^j)$$
$$= h^{kl}g_{ki}g_{lj}a^i a^j = g_{ij}a^i a^j$$
$$c_\lambda c^\lambda = h^{\lambda\mu}c_\lambda c_\mu = h^{\lambda\mu}(A_\alpha a^\alpha)A_\lambda(A_\nu a^\nu)A_\mu$$
$$= (A_\alpha a^\alpha)^2 h^{\lambda\mu}A_\lambda A_\mu = (A_\alpha a^\alpha)^2$$

（終）

命題 2.5.6　行列 $D_{\lambda\mu}, E_{\lambda\mu}$ を次のように定義する。

$$D_{00} = 1\ ,\ D_{0i} = A_i\ ,\ D_{i0} = 0\ ,\ D_{ij} = \delta^i_j$$

$$E_{00} = 1\ ,\ E_{0i} = 0\ ,\ E_{i0} = 0\ ,\ E_{ij} = g_{ij}$$

このとき、５次元計量 $h_{\lambda\mu}$ は、

$$h_{\lambda\mu} = D_{\alpha\lambda}D_{\beta\mu}E_{\alpha\beta} \quad (1)$$

のように書ける。また、 $h_{\lambda\mu}$ の行列式の値について、

$$\det(h_{\lambda\mu}) = \det(g_{ij}) \quad (2)$$

が成り立つ。

（証明）

$$P_{\lambda\beta} = D_{\alpha\lambda}E_{\alpha\beta}$$

とおくと、

$$P_{ij} = D_{0i}E_{0j} + D_{li}E_{lj} = g_{ij}$$

$$P_{0j} = D_{00}E_{0j} + D_{l0}E_{lj} = 0$$

$$P_{i0} = D_{0i}E_{00} + D_{li}E_{l0} = A_i$$

$$P_{00} = D_{00}E_{00} + D_{l0}E_{l0} = 1$$

となる。さらに、

$$Q_{\lambda\mu} = P_{\lambda\beta}D_{\beta\mu}$$

とおくと、

$$Q_{ij} = P_{i0}D_{0j} + P_{il}D_{lj} = A_iA_j + g_{ij}$$

$$Q_{0j} = P_{00}D_{0j} + P_{0l}D_{lj} = A_j$$

$$Q_{i0} = P_{i0}D_{00} + P_{il}D_{l0} = A_i$$

$$Q_{00} = P_{00}D_{00} + P_{0l}D_{l0} = 1$$

これより、

$$Q_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu}$$

であるから、結果 (1) を得る。また $\det(D_{\lambda\mu}) = 1$ であることがわかる。行列式の性質より

$$\det(h_{\lambda\mu}) = \det(D_{\alpha\lambda})\det(D_{\beta\mu})\det(E_{\alpha\beta})$$

これより結果 (2) を得る。(終)

§２．６　${}^{y}\Gamma^{i}_{jk}$ の５次元化

$x^i(\tau)$ を質点の自由落下路とする。この路に沿った時空ポテンシャルを $x^0(\tau)$ とすれば、この路を５次元的に $x^\lambda(\tau)$ と書ける。ここでは方程式 ${}^{y}[x^i/\tau] = 0$ を５次元化することを考える。

$$A_\alpha v^\alpha = v^0 + A_iv^i = 0 \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\tau}$$

であったから、これをさらに τ で微分して、

$$\frac{dv^0}{d\tau} + \frac{dA_i}{d\tau}v^i + A_i\frac{dv^i}{d\tau} = 0 \quad (1)$$

${}^{y}[x^i/\tau] = 0$ より

$$\frac{dv^i}{d\tau} = -\ {}^{y}\Gamma^{i}_{jk}v^jv^k$$

であるから、これを（１）へ入れると、

$$\frac{dv^0}{d\tau} + (\partial_jA_i)v^iv^j -\ {}^{y}\Gamma^{l}_{ij}A_lv^iv^j = 0$$

これを書き換えると、

$$\frac{dv^0}{d\tau} + ({}^y\nabla_j A_i) v^i v^j = 0 \quad (2)$$

となる。そこで、${}^y\Gamma^i_{jk}$ を５次元に拡張した ${}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を次のように定義する。

$${}^u\Gamma^i_{jk} = {}^y\Gamma^i_{jk} \ , \ {}^u\Gamma^0_{jk} = \frac{1}{2}({}^y\nabla_j A_k + {}^y\nabla_k A_j) \ , \ {}^u\Gamma^\lambda_{\mu 0} = {}^u\Gamma^\lambda_{0\mu} = 0$$

(${}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は x^0 を含まない)

これを使えば、${}^y[x^i/\tau] = 0$ は、

$$\frac{dv^i}{d\tau} + {}^u\Gamma^i_{jk} v^j v^k = 0$$

となり、（２）は、

$$\frac{dv^0}{d\tau} + {}^u\Gamma^0_{jk} v^j v^k = 0$$

となる、この２つを合わせた、

$${}^u[x^\lambda/\tau] = \frac{dv^\lambda}{d\tau} + {}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 0$$

が、５次元の質点の自由落下の方程式となる。

命題 2.6.1 $f_{\lambda\mu}$ を、

$$f_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \ , \ f_{0\mu} = f_{\mu 0} = 0$$

と定義するとき、

$${}^u\nabla_\lambda A_\mu = \frac{1}{2} f_{\lambda\mu}$$

が成り立つ。

（証明） $H_{\lambda\mu} = {}^u\nabla_\lambda A_\mu$ とおく。

$$H_{ij} = \partial_i A_j - {}^u\Gamma^\nu_{ij} A_\nu = \partial_i A_j - {}^y\Gamma^k_{ij} A_k - {}^u\Gamma^0_{ij} A_0$$

$$= {}^y\nabla_i A_j - \frac{1}{2}({}^y\nabla_j A_i + {}^y\nabla_i A_j) = \frac{1}{2}({}^y\nabla_i A_j - {}^y\nabla_j A_i) = \frac{1}{2} f_{ij}$$

$$H_{0j} = \partial_0 A_j - {}^u\Gamma^\nu_{0j} A_\nu = 0$$

$$H_{i0} = \partial_i A_0 - {}^u\Gamma^\nu_{i0} A_\nu = 0$$

$$H_{00} = \partial_0 A_0 - {}^u\Gamma^\nu_{00} A_\nu = 0$$

（終）

命題 2.6.2 任意の５次元の路 $x^\lambda(t)$ について、

$$h_{0\lambda}\ {}^u[x^\lambda/t] = \frac{d}{dt}(A_\lambda v^\lambda) \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dt}$$

が成り立つ。

（証明）

$$h_{0\lambda}\ {}^u[x^\lambda/t] = h_{00}\ {}^u[x^0/t] + h_{0i}\ {}^u[x^i/t]$$

$$= \ {}^u[x^0/t] + A_i\ {}^u[x^i/t]$$

$${}^u[x^0/t] = \frac{dv^0}{dt} + \ {}^y\nabla_j A_k v^j v^k$$

$$A_i\ {}^u[x^i/t] = A_i \frac{dv^i}{dt} + A_i\ {}^y\Gamma^i_{jk} v^j v^k$$

$$= \frac{d}{dt}(A_i v^i) - (\partial_k A_j) v^j v^k + A_i\ {}^y\Gamma^i_{jk} v^j v^k$$

これらより結果を得る。（終）

命題 2.6.3 任意の５次元の路 $x^\lambda(t)$ について、

$$h_{i\lambda}\ {}^u[x^\lambda/t] = g_{ip}\ {}^y[x^p/t] + A_i \frac{d}{dt}(A_\lambda v^\lambda) \quad , \quad v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dt}$$

が成り立つ。

（証明）

$$h_{i\lambda}\ {}^u[x^\lambda/t] = h_{i0}\ {}^u[x^0/t] + h_{ip}\ {}^u[x^p/t] \quad (1)$$

であるが、この右辺第１項は

$$= A_i\ {}^u[x^0/t] = A_i \frac{dv^0}{dt} + A_i\ {}^u\Gamma^0_{jk} v^j v^k$$

$$= A_i \frac{dv^0}{dt} + A_i({}^y\nabla_j A_k) v^j v^k$$

$$= A_i \frac{dv^0}{dt} + A_i(\partial_j A_k - \ {}^y\Gamma^p_{jk} A_p) v^j v^k$$

ここで、

$$(\partial_k A_j) v^j v^k = \frac{d}{dt}(A_k v^k) - A_k \frac{dv^k}{dt}$$

を考慮すれば、

$$= A_i \frac{d}{dt}(A_\lambda v^\lambda) - A_i A_p \ {}^y[x^p/t]$$

一方、式(1) の右辺第２項は

$$= g_{ip} \ {}^y[x^p/t] + A_i A_p \ {}^y[x^p/t]$$

これらより結果を得る。(終)

§２．７　${}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の一般化

質点の自由落下路、すなわち $A_\alpha v^\alpha = 0$ $(v^\alpha = dx^\alpha/d\tau)$ 方向へ始まる ${}^u[x^\lambda/\tau] = 0$ なる $x^\lambda(\tau)$ が、必ずまた ${}^U[x^\lambda/\tau] = 0$ を満たすとき、接続係数 ${}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の形を求めてみよう。

この２つの方程式を差し引けば、

$$({}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \ {}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu})v^\mu v^\nu = 0$$

これを点 P で考えると、この式は点 P から生えるすべての $A_\alpha v^\alpha = 0$ なる v^α について成り立つから、多項式

$$({}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \ {}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu})X^\mu X^\nu$$

は、多項式 $A_\nu X^\nu$ で割り切れるはずである。従って、ある K^λ_μ があって、

$$({}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \ {}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu})X^\mu X^\nu = 2K^\lambda_\mu X^\mu A_\nu X^\nu$$

これに命題 2.3.3 を適用することで、

$${}^U\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \ {}^u\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + (K^\lambda_\mu A_\nu + K^\lambda_\nu A_\mu)$$

と書けることがわかる。

では、任意の K^λ_μ を与えたとき、$A_\alpha v^\alpha = 0$ 方向へ始まる ${}^U[x^\lambda/\tau] = 0$ は、必ず質点の自由落下路になるのだろうか、そのためには、この解 $x^\lambda(\tau)$ が ${}^y[x^i/\tau] = 0$ を満たし、かつ、ずっと $A_\alpha v^\alpha = 0$ である必要がある。ところが命題 2.7.1 によって、この解 $x^\lambda(\tau)$ はずっと $A_\alpha v^\alpha = 0$ であることがわかる。また、

$$\begin{aligned} {}^U[x^i/\tau] &= \frac{dx^i}{d\tau} + \ {}^u\Gamma^i_{\mu\nu} v^\mu v^\nu + 2(K^i_\mu A_\nu) v^\mu v^\nu \\ &= \ {}^y[x^i/\tau] + 2(K^i_\mu A_\nu) v^\mu v^\nu = 0 \end{aligned}$$

で $A_\alpha v^\alpha = 0$ だから ${}^y[x^i/\tau] = 0$ も成り立つ。

これによって、５次元での質点の自由落下の方程式は、

$$^{U}[x^{\lambda}/\tau] = 0$$

と書いてもよいことがわかった。

命題 2.7.1 $^{U}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ を任意の K^{λ}_{μ} によって、

$$^{U}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = {}^{u}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + (K^{\lambda}_{\mu}A_{\nu} + K^{\lambda}_{\nu}A_{\mu})$$

と定義すると、 $A_{\alpha}v^{\alpha} = 0$ 方向へ始まる $^{U}[x^{\lambda}/\tau] = 0$ の解 $x^{\lambda}(\tau)$ は、ずっと $A_{\alpha}v^{\alpha} = 0$ を保つ。$(v^{\lambda} = dx^{\lambda}/d\tau)$

（証明） $^{U}[x^{\lambda}/\tau] = 0$ の解 $x^{\lambda}(\tau)$ について、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(A_{\mu}v^{\mu}) = {}^{U}\nabla_{\lambda}(A_{\mu}v^{\mu})v^{\lambda} &= ({}^{U}\nabla_{\lambda}A_{\mu})v^{\lambda}v^{\mu} + A_{\mu}({}^{U}\nabla_{\lambda}v^{\mu})v^{\lambda} \\ &= ({}^{U}\nabla_{\lambda}A_{\mu})v^{\lambda}v^{\mu} = (\partial_{\lambda}A_{\mu} - {}^{U}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}A_{\alpha})v^{\lambda}v^{\mu} \\ &= (\partial_{\lambda}A_{\mu} - {}^{u}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}A_{\alpha} - 2K^{\alpha}_{\lambda}A_{\mu}A_{\alpha})v^{\lambda}v^{\mu} \\ &= ({}^{u}\nabla_{\lambda}A_{\mu} - 2K^{\alpha}_{\lambda}A_{\mu}A_{\alpha})v^{\lambda}v^{\mu}\end{aligned}$$

命題 2.6.1 より、 $({}^{u}\nabla_{\lambda}A_{\mu})v^{\lambda}v^{\mu} = 0$ であるから、結局、

$$\frac{d}{d\tau}(A_{\lambda}v^{\lambda}) = -2K^{\alpha}_{\lambda}A_{\alpha}v^{\lambda}(A_{\mu}v^{\mu})$$

この式で、$f = A_{\lambda}v^{\lambda}$ と定義して命題 2.3.2 を適用すると、ずっと $A_{\lambda}v^{\lambda} = 0$ であることがわかる。（終）

参 考 文 献

(1) 高木貞治 : 代数学講義 (共立出版)

時空理論　第２章

2010 年４月　 Ver1.1　発行

著者 : 渡辺 満 , 発行者 : 渡辺 満